Ejercicios de preparación para olimpiadas.

20 de febrero de 2020

Ejercicio 1. Determina la cantidad de funciones $f : \{1, \ldots, n\} \to \{2019, 2020\}$ de modo que $f(1) + \cdots + f(n)$ es un número impar.

Ejercicio 2. (Putnam Exam, 1956) Prueba que todo entero positivo tiene un múltiplo cuya representación decimal incluye los diez dígitos.

Ejercicio 3. Sea A un conjunto con 8 elementos. Encuentra el número máximo de subconjuntos (distintos) de tres elementos de A de modo que la intersección de cualesquiera dos de ellos no contenga dos elementos.

Ejercicio 4. Partimos el conjunto $\{1, 2, \ldots, 49\}$ en tres subconjuntos disjuntos. Muestra que al menos uno de esos tres conjuntos contiene tres números distintos a, b, c tales que $a+b=c$.

Ejercicio 5. (Chinese Team Selection Test, 1994) Para $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ y $a+b+c+d+e=1$, probar que

$$ad + dc + cb + be + ea \leq \frac{1}{5}.$$

Ejercicio 6. Prueba que para cada tripleta de funciones $f, g, h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ hay tres números $x, y, z \in [0,1]$ tales que

$$|f(x) + g(y) + h(z) - xyz| \geq \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 7. (Russian Math Olympiad, 1995) ¿Es posible encontrar tres polinomios cuadráticos $f(x), g(x)$ y $h(x)$ de modo que la escuación $f(g(h(x))) = 0$ tiene como raíces los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8?

Ejercicio 8. (Crux Mathematicorum collection) Encuentra, sin aplicar técnicas de diferenciación, un polinomio de grado quinto $p(x)$ tal que $p(x)+1$ es divisible por $(x-1)^3$ y $p(x)-1$ es divisible por $(x+1)^3$.

Ejercicio 9. Sea $a, b, c > 0$ tales que $abc \leq 1$. Probar que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq a + b + c.$$